

Tronc Commun

Série 1 : Etude de Fonctions

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

b. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

c. $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$

d. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

e. $f(x) = \sqrt{x^2+x+5}$

f. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

g. $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

h. $f(x) = 3 - \sqrt{2-x}$

i. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

j. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + x - 2$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f

déterminer Parmi les points suivants : $O(0,0)$ $A(0,-2)$ $B(-2,0)$ $C(1,1)$ $D(2,7)$ $E(1,0)$ qui appartiennent à (C_f)

Exercice 3

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = -x^3 + 2x|x|$ $f(x) = x^4 - 3|x|$ $f(x) = -2x^3 + 5x - 2$

Exercice 4

Etudier la monotonie des fonctions définies par:

1) $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3x - 4$

2) $I =]-\infty, 0]$; $f(x) = 5 - x^2$

3) $I = \mathbb{R}^+$; $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

Corrigé de l'exercice 1 :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

$D_f = \mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)

b. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

c. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (x-3)(x+3) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0 \text{ et } x+3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3 \text{ et } x \neq -3\} \\ &= \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ &=]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[\end{aligned}$$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$ (car pour tout x de \mathbb{R} , on a : $x^2 + 1 > 0$)

e. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 5 \geq 0\}$

Etudions le signe du polynôme $x^2 + x + 5$:

On a : $\Delta = 1^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+5	+

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

f. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

2) $I =]-\infty, 0]$; $f(x) = 5 - x^2$

3) $I = \mathbb{R}^+$; $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$

Corrigé de l'exercice 1 :

a. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

$D_f = \mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)

b. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

c. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (x-3)(x+3) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0 \text{ et } x+3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3 \text{ et } x \neq -3\} \\ &= \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ &=]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[\end{aligned}$$

d. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$ (car pour tout x de \mathbb{R} , on a : $x^2 + 1 > 0$)

e. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 5 \geq 0\}$

Etudions le signe du polynôme $x^2 + x + 5$:

On a : $\Delta = 1^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
x^2+x+5	+

D'où : $D_f = \mathbb{R}$

f. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x \neq 1\} \\ &= [0, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

g. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$$

Étudions le signe du polynôme $x^2 - x - 2$:

On a : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2(1)} & , & \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2(1)} \\ x_1 &= -1 & , & \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	+	0	-	0	+

Donc : $D_f =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

h. $f(x) = 3 - \sqrt{2 - x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\} =]-\infty, 2]$$

i. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 6x + 5 > 0\}$$

Étudions le signe du polynôme $x^2 - 6x + 5$:

On a : $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16 > 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2(1)} & , & \quad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2(1)} \\ x_1 &= 1 & , & \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

Donc : $D_f =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

j. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

Corrigé de l'exercice 2 :

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

- ▷ On a : $f(0) = -2$ donc $O(0,0) \notin (C_f)$
- ▷ On a : $f(0) = -2$ donc $A(0,-2) \in (C_f)$
- ▷ On a : $f(-2) = 0$ donc $B(-2,0) \in (C_f)$
- ▷ On a : $f(1) = 0$ donc $C(1,1) \notin (C_f)$
- ▷ On a : $f(2) = 4$ donc $D(2,7) \notin (C_f)$
- ▷ On a : $f(1) = 0$ donc $E(1,0) \in (C_f)$

Corrigé de l'exercice 3 :

$$\triangleright f(x) = -x^3 + 2x|x|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x)|-x| = x^3 - 2x|x| = -(-x^3 + 2x|x|) = -f(x)$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

D'où f est une fonction impaire.

$$\triangleright f(x) = x^4 - 3|x|$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = (-x)^4 - 3|-x| = x^4 - 3|x| = f(x)$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } \begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

D'où f est une fonction paire.

$$\triangleright f(x) = -2x^3 + 5x - 2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\circ f(2) = -8$$

$$\circ f(-2) = 4$$

$$\circ -f(2) = 8$$

▪ Puisque $f(-2) \neq f(2)$ alors f n'est pas paire

▪ Puisque $f(-2) \neq -f(2)$ alors f n'est pas impaire

Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soient a et b deux éléments de \mathbb{R} , tels que $a < b$:

$$f(a) - f(b) = (3a - 4) - (3b - 4) = 3a - 3b = 3(a - b)$$

Puisque $a < b$ alors $a - b < 0$

$$\text{Donc } 3(a - b) < 0$$

$$\text{Donc } f(a) - f(b) < 0$$

$$\text{Donc } f(a) < f(b)$$

Et par suite f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2) Soient a et b deux éléments de $]-\infty, 0]$, tels que $a < b$:

$$\text{On a } a < b$$

$$\text{Donc } a^2 > b^2 \quad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont négatifs})$$

$$\text{Donc } -a^2 < -b^2$$

$$\text{Donc } 5 - a^2 < 5 - b^2$$

$$\text{Donc } f(a) < f(b)$$

Et par suite f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

3) Soient a et b deux éléments de \mathbb{R}^+ , tels que $a < b$:

$$\text{On a } a < b$$

$$\text{Donc } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\text{Donc } \sqrt{a} + 1 < \sqrt{b} + 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{a} + 1} > \frac{1}{\sqrt{b} + 1}$$

$$\text{Donc } \frac{2}{\sqrt{a}+1} > \frac{2}{\sqrt{b}+1}$$

$$\text{Donc } f(a) > f(b)$$

Et par suite f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ .

つづく